

圆加强练

一、填空题

1. 抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的焦点 F 恰好是圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 的圆心, 过点 F 且倾斜角为 45° 的直线 l 与 C 交于不同的 A, B 两点, 则以线段 AB 为直径的圆的标准方程为_____.

【答案】 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$

【分析】 根据题意可得: $C: y^2 = 4x$, $l: y = x - 1$, 联立方程利用韦达定理求

$|AB| = x_1 + x_2 + p$, 进而得出圆心及半径即可求解.

【详解】 由题意知, 焦点 $F(1, 0)$, 则抛物线 $C: y^2 = 4x$,

直线 $l: y = x - 1$, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

联立 $\begin{cases} y = x - 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 消去 y 并整理得 $x^2 - 6x + 1 = 0$, 则 $x_1 + x_2 = 6$, 所以

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 3, \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{x_1 - 1 + x_2 - 1}{2} = 2$$

所以 $|AB| = x_1 + x_2 + p = 6 + 2 = 8$.

则以线段 AB 为直径的圆的圆心为 $(3, 2)$, 半径为 $\frac{|AB|}{2} = 4$,

所以圆的标准方程为 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$

故答案为: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$.

2. 已知圆 O 的半径为 1, 点 P 为圆外一点, 过 P 作圆的两条切线, 切点为 A 和 B , 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值为_____.

【答案】 $2\sqrt{2} - 3$

【分析】 根据给定条件, 利用数量积的定义、二倍角公式列式, 再利用基本不等式求解即可得.

【详解】 设 $PA = PB = t$, $\angle APO = \angle BPO = \theta$,

由切线性质的可得 $PA \perp OA$ 、 $PB \perp OB$, 则 $\tan \theta = \frac{1}{t}$,

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = t^2 \cdot \cos 2\theta = t^2 \cdot (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = t^2 \cdot \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

$$= t^2 \cdot \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = t^2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{t^2}}{1 + \frac{1}{t^2}} = t^2 \cdot \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = \frac{t^4 - t^2}{t^2 + 1} = \frac{(t^2 + 1)^2 - 3(t^2 + 1) + 2}{t^2 + 1}$$

$$= t^2 + 1 + \frac{2}{t^2 + 1} - 3 \geq 2\sqrt{(t^2 + 1) \cdot \frac{2}{t^2 + 1}} - 3 = 2\sqrt{2} - 3;$$

当且仅当 $t^2 + 1 = \frac{2}{t^2 + 1}$, 即 $t^2 = \sqrt{2} - 1$ 时, 等号成立,

故答案为: $2\sqrt{2} - 3$.

3. 圆 $C_1: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ 关于直线 $y = x$ 对称的圆 C_2 的方程为_____.

【答案】 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$

【分析】 根据对称分析可知圆 C_2 的圆心坐标为 $(-1, 2)$, 半径为 $\sqrt{5}$, 即可得圆 C_2 的方程.

【详解】 由圆 $C_1: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ 化为标准方程为 $C_1: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$,

所以圆心为 $C_1(2, -1)$, 半径为 $r = \sqrt{5}$,

由圆 C_2 与圆 C_1 关于直线 $y = x$ 对称, 则圆 C_2 的圆心坐标为 $(-1, 2)$, 半径为 $\sqrt{5}$,

所以圆 C_2 的标准方程为 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$.

故答案为: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$.

4. 已知 $a \in \mathbb{R}$, 直线 $l: (a+1)x + 2y - 2a = 0$ 恒过定点 P , 圆 C 的圆心与点 P 关于直线 $y = x$ 对称, 直线 $l': 2x + y - 5 = 0$ 与圆 C 相交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 2$, 则圆 C 的半径为_____.

【答案】 $\sqrt{6}$

【分析】 根据题意, 由直线过定点可得点 P 的坐标, 从而可得点 C 的坐标, 再由圆的弦长公式, 代入计算, 即可得到结果.

【详解】 直线 $l: (a+1)x + 2y - 2a = 0$ 的方程可化为 $a(x-2) + (x+2y) = 0$,

令 $\begin{cases} x-2=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$, 所以点 P 的坐标为 $(2, -1)$,

又圆 C 的圆心与点 P 关于直线 $y = x$ 对称, 则 $C(-1, 2)$,

设圆 C 的方程为 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = r^2 (r > 0)$,

且圆 C 的圆心到直线 $l': 2x + y - 5 = 0$ 的距离为 $d = \frac{|-2 + 2 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}$,

又 $|AB| = 2$, 则 $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{6}$.

即圆 C 的半径为 $\sqrt{6}$.

故答案为: $\sqrt{6}$.

5. 已知直线 $l: x - my + 3 = 0$ 将圆 $C: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 2 = 0$ 的面积平分, 过点 $M(-5, m)$ 作圆 C 的切线, 切点为 N , 则 $|MN| =$ _____.

【答案】 $3\sqrt{6}$

【分析】 先求出圆的圆心和半径, 由于直线 $l: x - my + 3 = 0$ 将圆 $C: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 2 = 0$ 的面积平分, 所以可得直线 l 过圆心 C , 从而可求出 m 的值, 再利用勾股定理求出 $|MN|$ 的值.

【详解】 由圆 $C: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 2 = 0$, 即 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 11$,

则圆心 $C(3, 2)$, 半径为 $\sqrt{11}$,

因为直线 $l: x - my + 3 = 0$ 将圆 $C: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 2 = 0$ 的面积平分,

所以圆心 $C(3, 2)$ 在直线 $l: x - my + 3 = 0$ 上,

则 $3 - 2m + 3 = 0$, 解得 $m = 3$, 故 $M(-5, 3)$,

则 $|MC| = \sqrt{(-5-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{65}$,

所以 $|MN| = \sqrt{|MC|^2 - r^2} = \sqrt{65 - 11} = 3\sqrt{6}$.

故答案为: $3\sqrt{6}$.

6. 设 A, B 为圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 上两个动点, PA, PB 是圆的切线, 且 $\angle APB = 60^\circ$, 则点 P 的轨迹方程为_____.

【答案】 $(x-1)^2 + y^2 = 4$

【分析】 设 $P(x, y)$, 设圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 的圆心为 C , 则有 $BC \perp BP, AC \perp AP$, 由 $\angle APB = 60^\circ$ 得 $\angle APC = 30^\circ$, 在 $\text{Rt}\triangle APC$ 中得 $PC = 2CA$, 进而得点 P 在以 $C(1, 0)$ 为圆心, 半径为 2 的圆

上, 根据圆的标准方程即可求解.

【详解】设 $P(x, y)$, 设圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 的圆心为 C , 连接 BC, AC ,

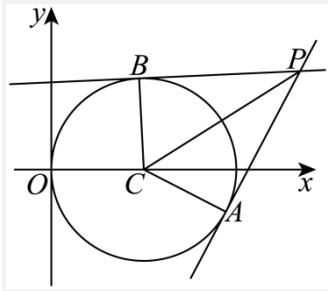
则 $BC \perp BP, AC \perp AP$, 又 $\angle APB = 60^\circ$, 所以 $\angle APC = 30^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle APC$ 中有: $PC = 2CA = 2$,

所以点 P 在以 $C(1, 0)$ 为圆心, 半径为 2 的圆上,

所以点 P 的轨迹方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 4$,

故答案为: $(x-1)^2 + y^2 = 4$.



7. $l_1: x - y + 6 = 0$, 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B , 与 $(x+1)^2 + (y-3)^2 = r^2 (r > 0)$ 交于 C, D 两点, $|AB| = 3|CD|$, 则 $r =$ _____.

【答案】2

【分析】先根据两点间距离公式得出 $|AB| = 6\sqrt{2}$, 再计算出圆心到直线的距离 d , 根据弦长公式 $|CD| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$ 列等式求解即可.

【详解】因为直线 $l_1: x - y + 6 = 0$ 与 x 轴交于 $A(-6, 0)$, 与 y 轴交于 $B(0, 6)$, 所以

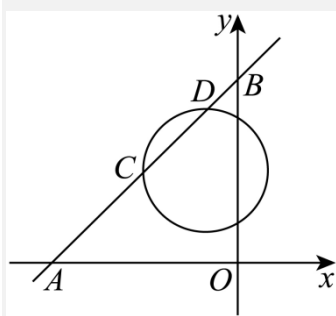
$$|AB| = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}, \text{ 所以 } |CD| = 2\sqrt{2},$$

圆 $(x+1)^2 + (y-3)^2 = r^2$ 的半径为 r , 圆心 $(-1, 3)$ 到直线 $l_1: x - y + 6 = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|-1 - 3 + 6|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$$\text{故 } |CD| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{r^2 - (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}, \text{ 解得 } r = 2;$$

故答案为: 2.

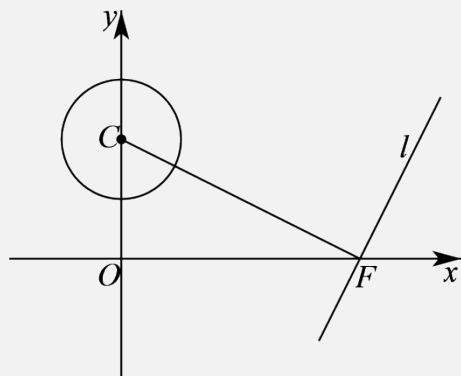


8. 已知抛物线 $y^2 = 16x$ 的焦点为 F ，圆 $C: x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ ，过点 F 作直线 l ，当圆心 C 到直线 l 的距离最大时，直线 l 的方程为_____.

【答案】 $2x - y - 8 = 0$

【分析】 求出抛物线的焦点 F 以及圆心 C 的坐标，分析可知当 $l \perp CF$ 时，圆心 C 到直线 l 的距离最大时，求出直线 l 的斜率，结合点斜式可得出直线 l 的方程.

【详解】 对于抛物线 $y^2 = 16x$ ，则 $2p = 16$ ， $p = 8$ ，所以 $\frac{p}{2} = 4$ ，故其焦点为 $F(4, 0)$ ，圆 C 的标准方程为 $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ ，圆心为 $C(0, 2)$ ，



当 $l \perp CF$ 时，圆心 C 到直线 l 的距离最大时，

因为 $k_{CF} = \frac{2-0}{0-4} = -\frac{1}{4}$ ，此时直线 l 的斜率为 $k = -\frac{1}{k_{CF}} = 4$ ，

因此，直线 l 的方程为 $y = 4(x - 4)$ ，即 $4x - y - 16 = 0$.

故答案为： $4x - y - 16 = 0$.

9. 直线 $y = k(x - 1)$ 与圆 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = r^2$ 交于 A, B 两点，若 $|AB|$ 的最大值为 4，则 $|AB|$ 的最小值为_____.

【答案】 $2\sqrt{2}$

【分析】 先结合题意并利用圆的性质得到 $r = 2$ ，进而分析出当 d 最大时， $|AB|$ 的值最小，

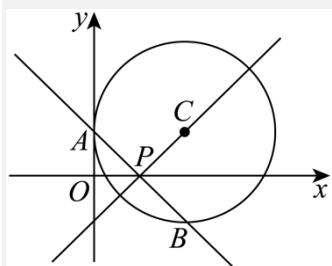
再利用圆的性质得到此时 $CP \perp AB$ ，进而结合斜率公式求出 $k_{AB} = -1$ ，再利用点到直线的距离公式求出 $d = \sqrt{2}$ ，最后利用勾股定理求出 $|AB|$ 的最小值即可.

【详解】因为直线 $y = k(x-1)$ 与圆 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = r^2$ 交于 A, B 两点，

所以当 $|AB|$ 的值最大时，其为圆的直径，而 $|AB|$ 的最大值为 4，得到 $r = 2$ ，

则圆的方程为 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ ，设圆心到直线的距离为 d ，

如图，记圆心 $C(2,1)$ ，直线 $y = k(x-1)$ 必过定点 $P(1,0)$ ，



由圆的性质得，当 $CP \perp AB$ 时， d 最大，此时 $|AB|$ 的值最小，

由斜率公式得 $k_{CP} = \frac{2-1}{1-0} = 1$ ，此时 $k_{AB} = -1$ ，

由题意得 $y = -(x-1)$ ，则 $x + y - 1 = 0$ ，

由点到直线的距离公式得 $d = \frac{|2+1-1|}{\sqrt{(-1)^2+1}} = \frac{|2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ，

由勾股定理得 $(\sqrt{2})^2 + (\frac{|AB|}{2})^2 = 4$ ，解得 $|AB| = 2\sqrt{2}$ ，

综上可得 $|AB|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$ 。

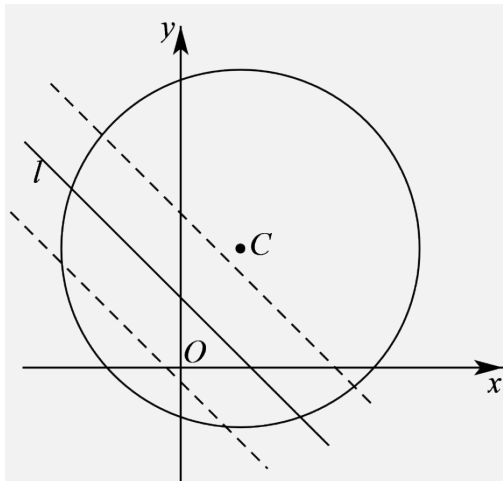
故答案为： $2\sqrt{2}$

10. 已知圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ ，直线 $l: x + y + b = 0$ ，圆上至少有三个点到直线 l 的距离等于 1，则 b 的范围是_____。

【答案】 $[-3-2\sqrt{2}, -3+2\sqrt{2}]$

【分析】作出图形，计算出圆心到直线 l 的距离，根据直线与圆的位置关系可得出关于实数 b 的不等式，解之即可。

【详解】圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ 的圆心为 $C(1,2)$ ，半径为 $r = 3$ ，



圆心 C 到直线 l 的距离为 $d = \frac{|b+3|}{\sqrt{2}}$,

因为圆上至少有三个点到直线 l 的距离等于 1, 则 $d+1 \leq r=3$, 即 $\frac{|b+3|}{\sqrt{2}} \leq 2$,

解得 $-3-2\sqrt{2} \leq b \leq -3+2\sqrt{2}$,

因此, 实数 b 的取值范围是 $[-3-2\sqrt{2}, -3+2\sqrt{2}]$.

故答案为: $[-3-2\sqrt{2}, -3+2\sqrt{2}]$.